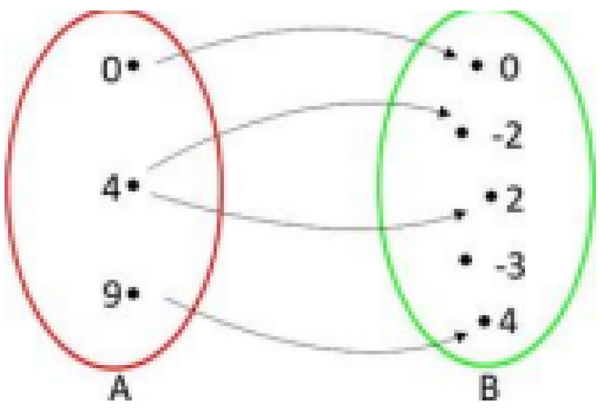
FUNÇÕES - DEFINIÇÃO

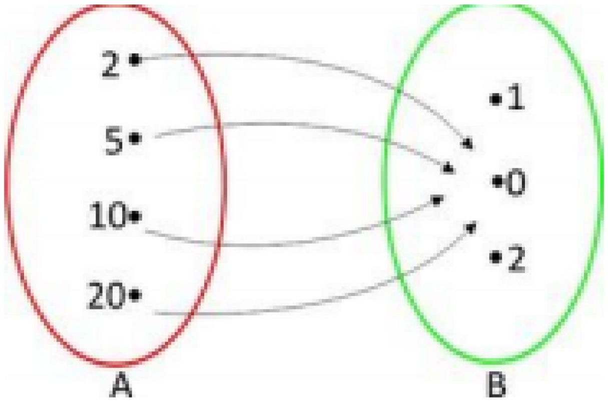
Professor Yago Henrique
@profyagohenrique

FUNÇÃO

É uma relação binária de A em B específica, onde cada elemento do conjunto A se relaciona com um únicoelemento do conjunto B. Observe o diagrama abaixo:



Este diagrama não configura uma função, pois há um elemento de A se relacionando com dois elementos de B. Agora observe o próximo exemplo:



Este sim configura uma função, pois cada elemento de A se relaciona com um de B. Não sobre ninguém em A sem relação, e nem tem relação de A com mais de um de B.

NOTAÇÃO DOS CONJUNTOS

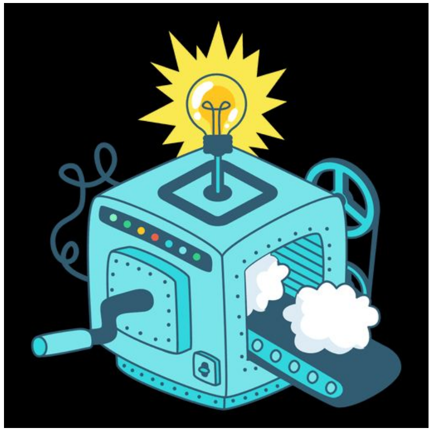
Domínio da função: É o conjunto de partida dos elementos (nos exemplos anteriores, o conjunto A).
Contradomínio da função: É o conjunto de chegada
da função (nos exemplos anteriores, o conjunto B).

Quando falarmos de uma função de A em B, escreveremos por:

$$
\begin{aligned}
f: A &\rightarrow B \\
x &\rightarrow y;\ y = f(x)
\end{aligned}
$$

LEI DE FORMAÇÃO DA FUNÇÃO

Para ser uma função, é preciso ser uma relação binária, como já vimos. Logo, é preciso ter uma condição preestabelecida, que nas funções chamaremos de lei de formação. Sabendo esta lei, e os elementos do domínio, é possível encontrar o valor numérico da função.



EXEMPLO - APLICAÇÃO

A duração y em horas da eficiência de um experimento é função da quantidade x > 0, em mg, de determinada substância z e varia de acordo com a função

$$y = 30 + \sqrt{x+1}$$

Querendo que esse experimento tenha uma eficiência de 31 horas e 6 minutos, a quantidade, em mg, da substância z que ele deverá conter é de:

a) 1,56 b) 0,56 c) 1,21 d) 0,21 e) 0,12

SOLUÇÃO

Como a função define y em horas, devemos escrever as 31 horas e 6 minutos em horas.

Como uma hora tem 60 minutos, podemos dizer que 6 minutos equivalem a um décimo de uma hora, ou seja 1/10 ou 0,1 hora.

Assim, 31 horas e 6 minutos pode ser escrito como 31,1h.

Assim, substituindo o valor de y na função, teremos:

$$31{,}1 = 30 + \sqrt{(x + 1)}$$
$$31{,}1 - 30 = \sqrt{(x + 1)}$$
$$1{,}1 = \sqrt{(x + 1)}$$
$$1{,}1^2 = x + 1$$
$$1{,}21 = x + 1$$
$$x = 1{,}21 - 1 = 0{,}21$$ (**LETRA D**)

EXEMPLO - APLICAÇÃO

Considere que o preço P a ser pago por uma corrida de táxi, em reais, dependa exclusivamente do percurso d, em quilômetros, que é feito nessa corrida. Sabe-se que, ao iniciar a corrida, o cliente já paga R$4,80 e, a cada quilômetro rodado, há um acréscimo de R$0,75. A expressão que relaciona o preço P, em reais, em função da distância percorrida d, em quilômetros, é:

a) $P = 5(96 + 15d)$

b) $P = \dfrac{48+75d}{10}$

c) $P = \dfrac{75+48d}{10}$

d) $P = \dfrac{96+15d}{20}$

e) $P = 4{,}8 + 7{,}5d$

Percebam que o valor inicial é de R$ 4,80. Esse valor independe da quilometragem (o valor de d). Esse valor de d será multiplicado por R$ 0,75.

Assim, a expressão será P = 4,80 + 0,75d.

Essa expressão é equivalente à **letra D.**

FUNÇÃO DO PRIMEIRO GRAU

DEFINIÇÃO

- Função afim (ou polinomial do 1º grau): Sejam A e B funções reais, onde a ≠ b. denominamos função afim ou função polinomial do primeiro grau, a toda função f : IR $\longrightarrow$ IR definida por

$$f(x) = ax + b,$$

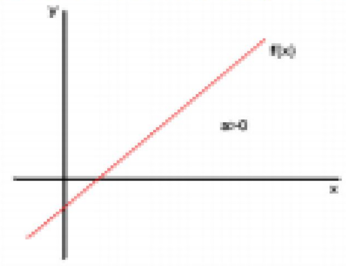
$$\text{com } a,\ b \text{ e } x \in \text{IR } (\text{ com } a \neq 0)$$

Exemplo: $f(x) = 4{,}50 + 0{,}9x$

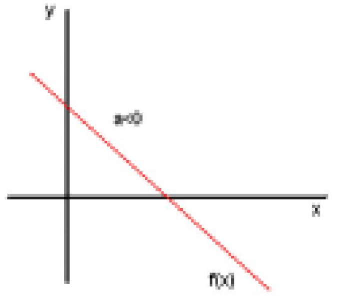
GRÁFICOS

O gráfico da função afim é sempre uma **reta**.

Quando $a > 0$: Nestes casos, a função é **crescente**.

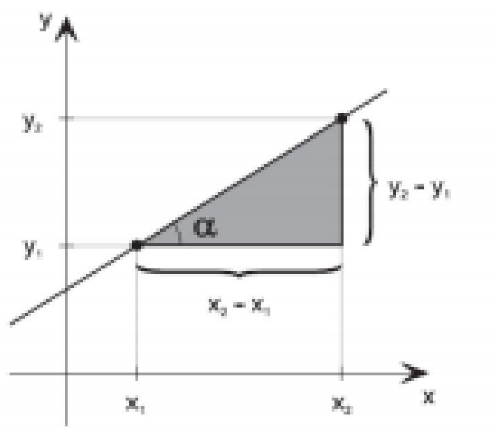


Quando $a < 0$: Nestas situações, a função será **decrescente**.



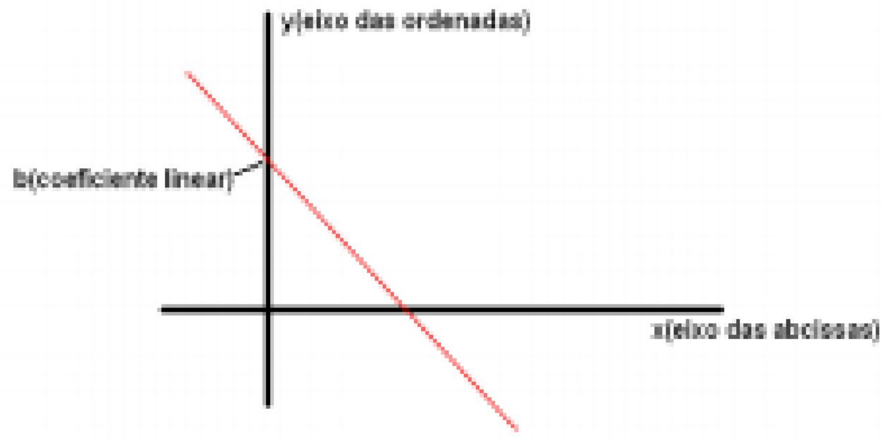
COEFICIENTES DA FUNÇÃO AFIM

Coeficiente angular (a) - Tangente do ângulo formado pela reta da função e o eixo das abcissas. Também chamada de taxa de variação da reta.



$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

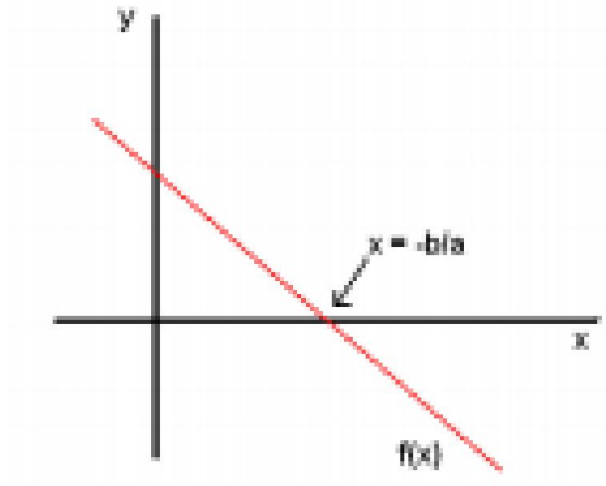
Coeficiente linear (b) - Ponto de encontro entre a reta da função e o eixo das ordenadas. Também chamado de **termo independente.**



ZERO OU RAÍZ DA FUNÇÃO

O zero da função é o valor de x que faz com f(x) = 0, ou seja, o valor que toca no eixo x.

$$ax + b = 0 \rightarrow ax = -b \rightarrow x = \frac{-b}{a}$$



EXEMPLO - APLICAÇÃO

Um automóvel, após atingir certa velocidade, tem os freios acionados e sua velocidade v decai de acordo com a função $v(t) = a.t + b$, em que t é o tempo decorrido, em segundo, após o acionamento dos seus freios. Sabe-se que, no momento que se pisa nos freios, a velocidade do automóvel é de 100km/h e, dois segundos depois, sua velocidade já era de 60 km/h. Assim, do inicio da freada ate o carro parar totalmente se passaram, em segundos:

a) 3,5 b) 4,5 c) 5 d) 6 e) 6,5

SOLUÇÃO

Primeiramente vamos transformar as velocidades:
Velocidade inicial = 100 km/h = 100/3,6 = 27,78 m/s
Velocidade final = 60 km/h = 60/3,6 = 16,68 m/s

Aplicando na função, temos que b = 27,78 e v(t) =16,68, assim

$16,68 = a.2 + 27,78 \rightarrow a = -11/2 = -5,5$

Agora, aplicando na situação onde o carro para, teremos:

$$0 = -5{,}5.t + 27{,}78$$

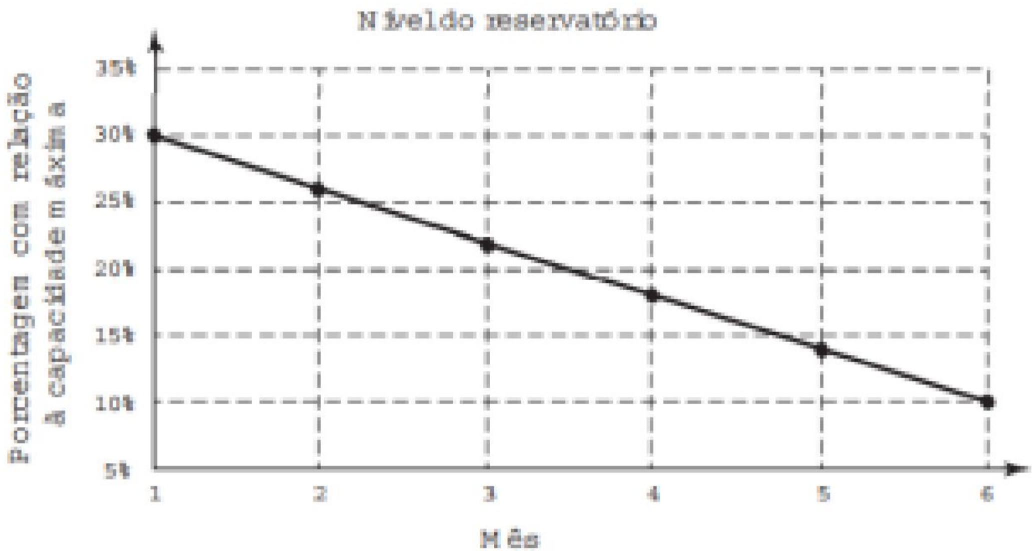
$$-27{,}78 = -5{,}5.t$$

$$t = 27{,}78/5{,}5$$

$$t = 5\ s$$

EXEMPLO-APLICAÇÃO

Um dos grandes desafios do Brasil é o gerenciamento dos seus recursos naturais, sobretudo os recursos hídricos. Existe uma demanda crescente por água e o risco de racionamento não pode ser descartado. O nível de água de um reservatório foi monitorado por um período, sendo o resultado mostrado no gráfico. Suponha que essa tendência linear observada no monitoramento se prolongue
pelos próximos meses.



Nas condições dadas, qual o tempo mínimo, após o sexto mês, para que o reservatório atinja o nível zero de sua capacidade?

a) 2 meses e meio b) 3 meses e meio c) 1 mês e meio d) 4 meses e) 1 mês

- Analisando o gráfico, percebemos que ocorre uma variação de (30% – 10%) = 20% no percentual da capacidade máxima do reservatório em 6 – 1 = 5 meses. Assim, para que haja uma redução de 10% do nível de capacidade, deve-se passar 2,5 meses.

PARÓDIA - LEPO LEPO

Ahhh, eu já não sei o que fazer!
A função afim eu não consigo aprender.
Calma, eu te ajudo a resolver
Tá tudo calculado, vou mostrar para você!

f é ax + b, prometa, nunca vai esquecer.
a nunca pode ser zero
E b é um valor real, aprende, donzelo.

Eu chamo b de valor fixo, e a raíz é -b/a
E eu já já já já já já já passei, passei
E ficou fácil, pois eu já já já já já já já memorizei!

FUNÇÃO QUADRÁTICA

DEFINIÇÃO

Sejam a, b e c números reais. Denominamos função quadrática ou função polinomial do segundo grau, a toda função $f : IR \longrightarrow IR$ definida por

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

com a, b e c e x $\in$ IR (com $a \neq 0$)

Ex: $f(x) = x^2 - 5x + 6$

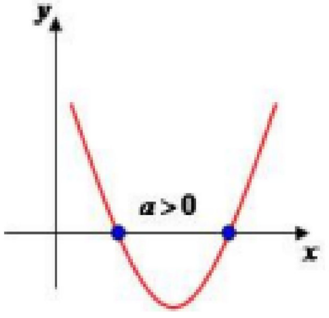
GRÁFICOS

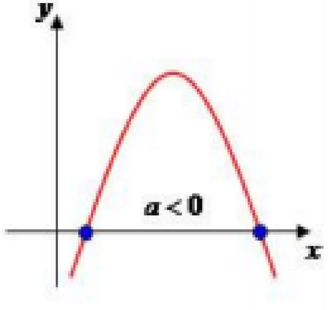
A figura que representa o gráfico da função afim será sempre uma curva chamada **parábola**.

Concavidade da parábola

Quando a > 0: Nestes casos, a concavidade está voltada para cima. (Se algo é positivo, o sorriso é feliz).

Quando a < 0: Nestas situações, a concavidade está voltada para baixo. (Coisas negativas, sorriso triste).





ZEROS OU RAÍZES DA FUNÇÃO

Para encontrarmos as raízes da função do segundo grau, utilizaremos a fórmula de Bháskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Onde Δ é denominado fator discriminante da função de segundo grau, e **$\Delta = b^2 - 4ac$.**

O VÉRTICE DA PARÁBOLA

O vértice da parábola é o ponto onde ela faz a curva, também chamado de máximo ou mínimo da função. Quando o valor do coeficiente a for menor que zero, a parábola possuirá valor máximo. Do contrário, será o valor mínimo. As coordenadas do vértice V(Xv, Yv) serão:

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

EXEMPLO - APLICAÇÃO

Um alpinista tinha como objetivo escalar uma montanha muito alta. Com o auxílio de um aplicativo, conseguiu identificar que a montanha se assemelhava ao gráfico de uma função quadrática na forma $f(x) = -8x^2 + 32x + 10$, com x em metros. Sabe-se que o gráfico desta função, em relação ao tamanho original da montanha, está na escala 1 para 100. Assim, quando o alpinista chegar ao topo desta montanha, estará a uma altura de:

a) 42 m b) 420 m c) 4200 km d) 420 km e) 4,2 km

SOLUÇÃO

Para saber a altura da montanha, precisaremos encontrar o valor do y do vértice, então precisaremos encontrar o valor de Δ.

$\Delta = 32^2 - 4.(-8).10 = 1024 + 320 = 1344$

Teremos então: $Yv = -1344/4.(-8) = 42$ m

Como a escala da função é de 1 para 100, teremos que o tamanho real da montanha é 4200 metros, ou 4,2 km.